Совет ректоров вузов Томской области
Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области
(ОРМО) 2014-2015 гг.
Физика (заключительный этап) 11 класс (решения)

Вариант 2

1. Метеорологический зонд объёмом $\boldsymbol{V_0}$ заполняют смесью газов из двух баллонов. В первом баллоне находится газ с молярной массой $\boldsymbol{\mu_1}$ под давлением $\boldsymbol{P_1}$, во втором – газ с молярной массой $\boldsymbol{\mu_2}$ под давлением $\boldsymbol{P_2}$. За время равное $\boldsymbol{\tau}$ из каждого баллона по трубкам в зонд поступает столб соответствующего газа высотой $\boldsymbol{h}$ и диаметром $\boldsymbol{d}$. Определите, через сколько времени от начала заполнения зонда плотность смеси газов в нём достигнет значения $\boldsymbol{\rho}$. Давления газов в баллонах и температуру **T** в ходе процесса считать неизменными.
Оценка задания № 1 – 15 баллов

Решение:

1. Объем газа, поступающего за время τ из каждого баллона, $V = \dfrac{h\pi d^2}{4}$. Из первого баллона эта порция газа поступает под давлением P_1, из второго – под давлением P_2.
(2 балла)

Из уравнения Менделеева – Клапейрона можно найти массы газов поступающих в зонд за время τ:

$$P_1V = \frac{m_1}{\mu_1}RT, \qquad P_2V = \frac{m_2}{\mu_2}RT. \qquad \textbf{(3 балла)}$$

$$m_1 = \frac{P_1h\pi d^2\mu_1}{4RT}, \qquad m_2 = \frac{P_2h\pi d^2\mu_2}{4RT} \qquad \textbf{(1 балл)}$$

Т.к. за одинаковые промежутки времени в зонд поступают одинаковые порции газа, то за время t в зонд поступит N порций газов ($N = t/\tau$), т.е. масса M_1 первого газа и M_2 второго:

$$M_1 = m_1\frac{t}{\tau} = \frac{P_1h\pi d^2\mu_1}{4RT}\frac{t}{\tau}, \qquad M_2 = m_2\frac{t}{\tau} = \frac{P_2h\pi d^2\mu_2}{4RT}\frac{t}{\tau}. \qquad \textbf{(3 балла)}$$

Общая масса смеси в зонде через время t:

$$M = M_1 + M_2 = \frac{h\pi d^2}{4RT}\frac{t}{\tau}\left(P_1\mu_1 + P_2\mu_2\right). \qquad \textbf{(3 балла)}$$

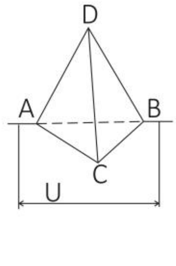
Общую массу газовой смеси можно представить через плотность смеси и объём зонда: $\rho V_0 = M$. Тогда искомое время можно определить из выражения:

$$\rho V_0 = \frac{h\pi d^2}{4RT}\frac{t}{\tau}\left(P_1\mu_1 + P_2\mu_2\right),$$

$$t = \frac{4RT\rho V_0}{h\pi d^2\left(P_1\mu_1 + P_2\mu_2\right)}\tau \qquad \textbf{(3 балла)}$$

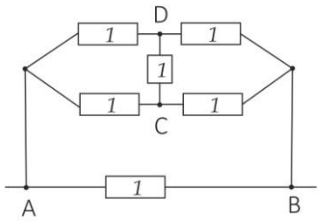
Ответ: $t = \dfrac{4RT\rho V_0}{h\pi d^2\left(P_1\mu_1 + P_2\mu_2\right)}\tau$

2. Проволочный каркас в виде тетраэдра ABDC подключен к источнику постоянного тока. Точки подключения – A и B (см. рис.). Сопротивления всех рёбер тетраэдра одинаковы и равны 1 Ом. Из тетраэдра вырезали ребро AC, в результате чего сила тока во



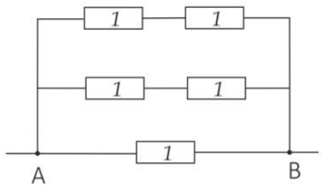
внешней цепи уменьшилась на 4 А. Чему равно напряжение между точками АВ? Чему была равна сила тока во внешней цепи до исключения ребра АС?
Оценка задания № 2 – 15 баллов

Решение:
а) Эквивалентная схема: **(2 балла)**



Полное сопротивление легко определить, если сообразить, что потенциалы точек C и D одинаковы, и поэтому тока на линии CD нет.
(2 балла)

Поэтому схему логично заменить такой: **(1 балл)**

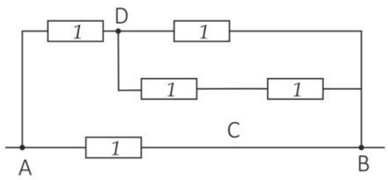


Тогда

$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2 => R_0 = \frac{1}{2}$ (Ом) **(1 балл)**

Сила тока в цепи определится:
$I_0 = \frac{U}{R_0} = 2U$ (А) **(1 балл)**

б) Исключение ребра АС приведёт к следующей эквивалентной схеме



(2 балла)

Полное сопротивление будет

$$\frac{1}{R_{DB}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} => R_{DB} = \frac{2}{3} \text{ (Ом)}$$

$$R_{AB(1)} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \text{ (Ом)};$$

$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{1} + \frac{3}{5} = \frac{8}{5} => R_1 = \frac{5}{8}$ (Ом) **(2 балла)**
Сила тока в цепи в этом случае
$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{8U}{5}$ (А) **(1 балл)**
в) Согласно условию задачи $I_0 - I_1 = 4$ А $=> 2U - \frac{8U}{5} = 4 => \frac{2U}{5} = 4 => U = 10$ (В)
(2 балла)
Сила тока $I_0 = 2U = 20$ (А) **(1 балл)**
Ответ: 10 В, 20 А

3. В рентгеновской трубке мощностью 5 кВт электроны оказывают на пятно на мишени диаметром 0,3 мм среднее давление 1000 Па. Каково рабочее напряжение трубки? Масса электрона $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, заряд электрона $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Для эффективной работы трубки поверхность мишени наклонена под небольшим углом.
Оценка задания № 3 – 15 баллов

Решение:
Т.К. угол наклона мал, то его можно не учитывать и считать, что мишень перпендикулярна потоку электронов. **(1 балл)**
Зная давление и площадь пятна, можно определить силу, действующую со стороны электронов на мишень:

$$F = P \cdot S = 1000 \cdot \frac{3{,}14 \cdot (0{,}3 \cdot 10^{-3})^2}{4} = 7{,}065 \cdot 10^{-5}\ (\text{Н})$$

Согласно II закону Ньютона

$F \cdot t = p_1 - p_0$, где $p_1 - \text{p}_0$ − изменение импульса всех электронов, достигших мишени за время t. Т.к. мишень поглощает электроны, то $p_0 = 0 => Ft = NmV$, где N – количество электронов, достигших мишени за время t, m – масса электрона, V – его скорость.

Отсюда $F = \frac{N}{t} mV$ **(4 балла)**

Это выражение легко преобразовать:

$F = \frac{N}{t} mV = \frac{Ne}{t} \cdot \frac{mV}{e} = \frac{Q}{t} \cdot \frac{mV}{e} = \frac{I}{e} mV$ **(1 балл)**

Где Q – полный заряд всех электронов, достигших мишени, I – сила тока в трубке.
В свою очередь, скорость электрона определяется из теоремы о кинетической энергии (начальная скорость электронов равна 0):

$$\frac{mV^2}{2} = eU => V = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$, где U – искомое рабочее напряжение трубки.

Подстановка в формулу для силы приводит к выражению

$F = \frac{I}{e} m \sqrt{\frac{2eU}{m}}$ **(2 балла)**

В свою очередь, силу тока можно связать с напряжением через мощность трубки

$$Pi = IU => I = \frac{Pi}{U}$$

После подстановки выражение для силы принимает вид

$F = \frac{m}{e} \cdot \frac{Pi}{U} \sqrt{\frac{2eU}{m}} = Pi \sqrt{\frac{2m}{eU}}$ **(1 балл)**

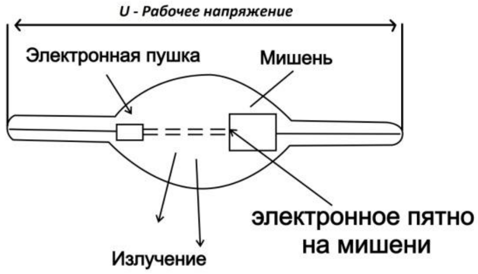
Отсюда легко выражается U:

$U = \frac{2m}{e} \cdot \left(\frac{Pi}{F}\right)^2$ **(3 балла)**

Подстановка даёт:

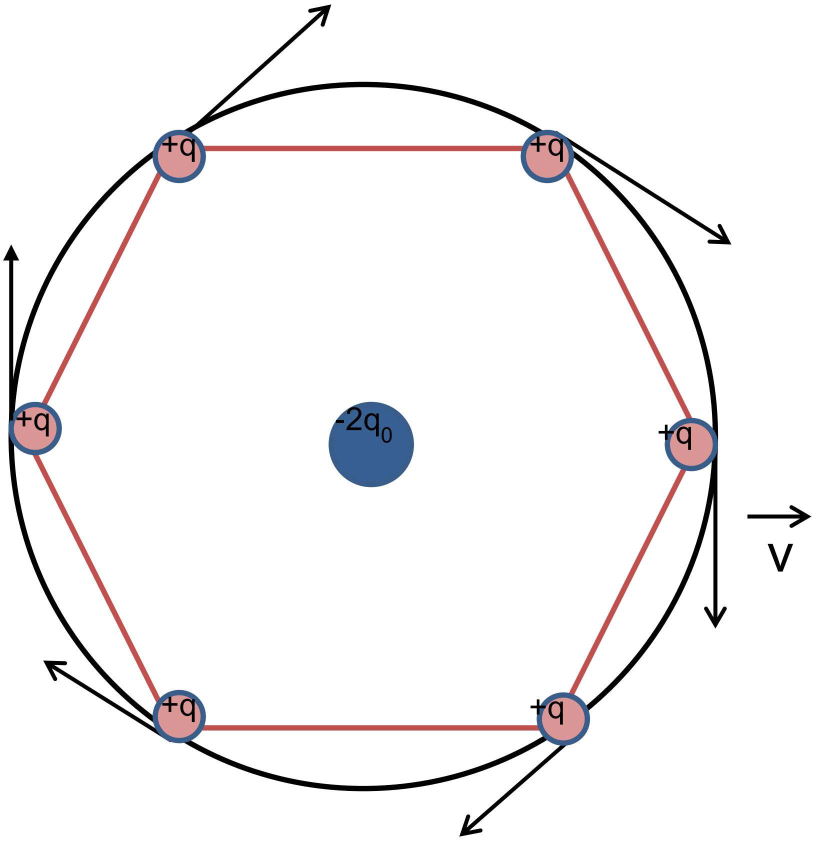
$U = \frac{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} \cdot \left(\frac{5000}{7{,}065 \cdot 10^{-5}}\right)^2 = 56973\ (\text{В}) \approx 57$ кВ **(3 балла)**

Ответ: 57 кВ
Примечание: Устройство рентгеновской трубки

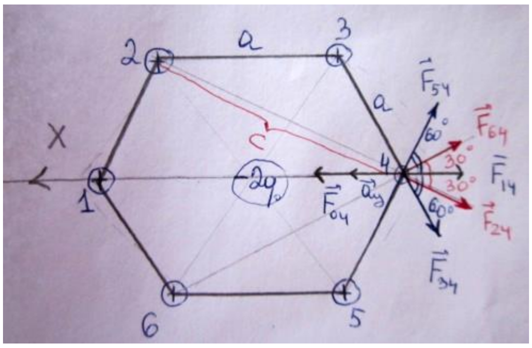


4. Вокруг отрицательного заряда ***-2q₀*** вращаются по круговой орбите, располагаясь в углах правильного шестиугольника со стороной **a,** шесть одинаковых частиц массой ***m*** и зарядом ***+q*** каждая (|***q_o***| = |***q***|). Заряд ***$-2q_o$*** находится в центре этого шестиугольника. Определите угловую скорость ***ω*** движения частиц по орбите.

Оценка задания № 4 – 15 баллов



Решение:



Для определения угловой скорости ω достаточно рассмотреть движение одной из шести частиц. Так как заряды равны по величине и расположены симметрично, то достаточно рассмотреть силы, действующие на один из зарядов, например, q_4. **(2 балла)**

Запишем второй закон Ньютона в векторной форме

$$m\vec{a}_{\text{цс}} = \vec{F}_{14} + \vec{F}_{24} + \vec{F}_{34} + \vec{F}_{54} + \vec{F}_{64} + \vec{F}_{o4},$$ **(2 балла)**

Поскольку заряды q_3 и q_4, q_4 и q_5 одинаковы и находятся на одном и том же расстоянии, силы F_{34} и F_{45} по модулю одинаковы, также и заряды q_2 и q_4, q_4 и q_6, следовательно, силы F_{24} и F_{46} по модулю одинаковы. **(3 балла)**

Запишем второй закон Ньютона в проекциях на ось X:

$$ma_{\text{цс}} = F_{o4} - F_{14} - 2F_{24}\cos 30^0 - 2F_{34}\cos 60^0,$$ **(1 балл)**

$$m\omega^2 a = k\frac{2q_0 q}{a^2} - k\frac{q^2}{(2a)^2} - 2k\frac{q^2}{3a^2}\frac{\sqrt{3}}{2} - 2k\frac{q^2}{a^2}\frac{1}{2},$$

$$m\omega^2 a = k\,\frac{2q^2}{a^2} - k\,\frac{q^2}{4a^2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\,k\,\frac{q^2}{a^2} - k\,\frac{q^2}{a^2} = k\,\frac{q^2}{a^2}\left(\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right),$$

$$\omega^2 = k\,\frac{q^2}{ma^3}\left(\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = k\,\frac{q^2}{ma^3}\left(\frac{9-4\sqrt{3}}{4\cdot 3}\right),$$

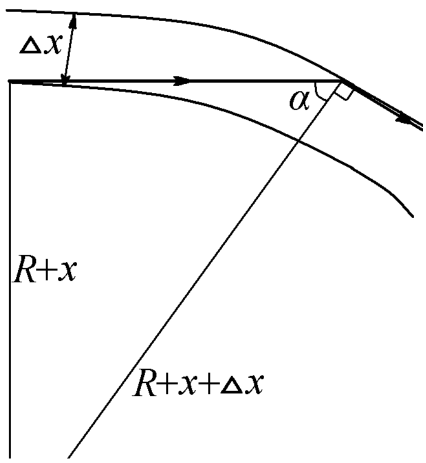
$$\omega = \frac{q}{2a}\sqrt{\frac{k}{ma}\left(\frac{9-4\sqrt{3}}{3}\right)}.$$ **(7 баллов)**

Ответ: $\omega = \frac{q}{2a}\sqrt{\frac{k}{ma}\left(\frac{9-4\sqrt{3}}{3}\right)}$

5. На цилиндрическое основание радиусом ***R*** надет широкий цилиндрический световод, показатель преломления которого уменьшается от внутреннего радиуса к внешнему по закону $\boldsymbol{n = n_0 - kx}$ при $\boldsymbol{x \ll n/k}$, где $\boldsymbol{n_0}$, ***k*** – известные постоянные величины. Определите, на каком расстоянии ***x*** от внутреннего радиуса нужно запустить световой луч в световод, чтобы он обходил его по окружности постоянного радиуса.

Оценка задания № 5 – 20 баллов

Решение: рисунок **(2 балла)**



Выделим в световоде тонкий слой радиуса x и толщиной $\Delta x \ll x$. Получим световой канал с внутренним радиусом $R + x$ и внешним $R + x + \Delta x$ (см. рисунок) с постоянным показателем преломления $n = n_0 - kx$. **(4 балла)**

Для того, чтобы световой луч не покидал данный тонкий слой, необходимо, чтобы на внешней границе этого слоя выполнялось условие полного внутреннего отражения:

$n(x)\cdot\sin\alpha = n(x+\Delta x)\cdot\sin(90^\circ)$. **(3 балла)**

где $n(x) = n_0 - kx$,

$n(x+\Delta x) = n_0 - kx - k\Delta x$. **(2 балла)**

Из прямоугольного треугольника на рисунке

$\sin\alpha = (R + x)/(R + x + \Delta x)$. **(2 балла)**

Подставляя эти выражения в условие полного внутреннего отражения, получим:

$$(n_0 - kx)\cdot(R + x)/(R + x + \Delta x) = n_0 - kx - k\Delta x.$$

Приведём к общему знаменателю правую и левую часть равенства, раскроем скобки и сократим подобные слагаемые:

$$(n_0 - kx)\cdot(R + x) = (n_0 - kx - k\Delta x)\cdot(R + x + \Delta x).$$

$$n_0R + n_0x - kxR - kx^2 = n_0R + n_0x - kxR - kx^2 + n_0\Delta x - kx\Delta x - k\Delta xR - k\Delta xx - k\Delta x^2.$$

$$0 = n_0\Delta x - 2kx\Delta x - k\Delta xR - k\Delta x^2.$$

$$0 = n_0 - 2kx - kR - k\Delta x.$$ **(4 балла)**

Учтём, что $\Delta x \ll x$ (пренебрежём последним слагаемым) **(2 балла)**

и выразим искомое расстояние x:

$$x = (n_0 - kR) / 2k = (n_0 / k - R) / 2.$$ **(1 балл)**

Ответ: $\boldsymbol{x = (n_0 - kR) / 2k = (n_0 / k - R) / 2}$.

6. В два одинаковых неподвижных кубика попадают пули. В первый кубик попадает пуля массой $\boldsymbol{m_1}$ и застревает в нём, во второй – пуля массой $\boldsymbol{m_2}$ и пробивает его насквозь. После этого кубики начинают двигаться с одинаковыми скоростями. Определите, во сколько раз масса первой пули меньше массы кубика, если масса второй пули меньше в $\boldsymbol{l}$ раз массы первой, а в первом кубике выделится в $\boldsymbol{n}$ раз меньше тепла, чем во втором. Пули до попадания в кубики имели одинаковые импульсы. Уменьшением массы второго кубика пренебречь. Укажите условия, накладываемые на $\boldsymbol{l}$ и $\boldsymbol{n}$, чтобы решение было возможным.

Оценка задания № 6 – 20 баллов

Решение: рисунок **(1 балл)**

Запишем законы сохранения импульса и полной энергии системы «пуля-кубик» для обоих случаев:

$$m_1v_1 = (m_1 + M)V, \quad (1)$$

$$m_2v_2 = MV + m_2v_2', \quad (2)$$

$$\frac{m_1v_1^2}{2} = \frac{(m_1 + M)V^2}{2} + Q_1, \quad (3)$$

$$\frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{MV^2}{2} + \frac{m_2v_2'^2}{2} + Q_2, \quad (4)$$

(5 баллов)

Учтём, что импульсы пуль изначально равны:

$$m_1v_1 = m_2v_2, \quad (5)$$

(1 балл)

Из (1) и (2) выразим скорость второй пули после пробивания кубика v':

$$V = \frac{m_1v_1}{m_1 + M} = \frac{m_2v_2}{m_1 + M}, \quad (6)$$

$$m_2v_2 = \frac{Mm_2v_2}{m_1 + M} + m_2v_2', \qquad v_2 = \frac{Mv_2}{m_1 + M} + v_2',$$

$$v_2' = v_2\left(1 - \frac{M}{m_1 + M}\right) = v_2\left(\frac{m_1 + M - M}{m_1 + M}\right) = v_2\left(\frac{m_1}{m_1 + M}\right) \quad (7)$$

(3 балла)

Из (3) и (4) выразим количество тепла, выделившегося в каждом кубике:

$$Q_1 = \frac{m_1v_1^2}{2} - \frac{(m_1 + M)V^2}{2} = (1) = \frac{m_1v_1^2}{2} - \frac{m_1v_1^2}{2}\frac{m_1}{(m_1 + M)} =$$

$$= \frac{m_1v_1^2}{2}\left(1 - \frac{m_1}{m_1 + M}\right) = \frac{m_1v_1^2}{2}\left(\frac{M}{m_1 + M}\right)$$

$$Q_2 = \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{MV^2}{2} - \frac{m_2 v_2'^2}{2} = (6)(7) =$$

$$= \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{m_2 v_2^2}{2}\frac{m_2 M}{(m_1 + M)^2} - \frac{m_2 v_2^2}{2}\left(\frac{m_1}{m_1 + M}\right)^2 =$$

$$= \frac{m_2 v_2^2}{2}\left(1 - \frac{m_2 M - m_1^2}{(m_1 + M)^2}\right) = \frac{m_2 v_2^2}{2}\left(\frac{2m_1 M + M^2 - m_2 M}{(m_1 + M)^2}\right) =$$

$$= \frac{m_2^2 v_2^2}{2m_2}\left(\frac{2m_1 M + M^2 - m_2 M}{(m_1 + M)^2}\right) = (5) = \frac{m_1^2 v_1^2}{2m_2}\left(\frac{2m_1 M + M^2 - m_2 M}{(m_1 + M)^2}\right) =$$

$$= \frac{m_1 v_1^2}{2}\left(\frac{m_1(2m_1 M + M^2 - m_2 M)}{m_2 (m_1 + M)^2}\right)$$

(3 балла)

По условию $Q_2/Q_1 = n$.

$$\frac{m_1 v_1^2}{2}\left(\frac{M}{m_1 + M}\right) \cdot n = \frac{m_1 v_1^2}{2}\left(\frac{m_1(2m_1 M + M^2 - m_2 M)}{m_2 (m_1 + M)^2}\right),$$

$$nM = \frac{2m_1^2 M + m_1 M^2 - m_1 m_2 M}{m_2 m_1 + m_2 M},$$

$$n m_1 m_2 M + n m_2 M^2 = 2m_1^2 M + m_1 M^2 - m_1 m_2 M,$$

$$n m_1 m_2 + n m_2 M = 2m_1^2 + m_1 M - m_1 m_2, \qquad \textbf{(2 балла)}$$

Учтём, что $m_2 = m_1/l$.

$$\frac{n m_1^2}{l} + \frac{n m_1 M}{l} = 2m_1^2 + m_1 M - \frac{m_1^2}{l},$$

$$n m_1 + nM = 2l m_1 + lM - m_1,$$

$$nM - lM = 2l m_1 - n m_1 - m_1,$$

$$(n - l)M = (2l - n - 1)m_1, \qquad \textbf{(2 балла)}$$

Окончательно:

$$\frac{M}{m_1} = \frac{(2l - n - 1)}{(n - l)}. \qquad \textbf{(1 балл)}$$

Очевидно, что n и l должны удовлетворять условиям:

1) $n > l > 1$, 2) $2l > n + 1$. **(2 балла)**

Ответ: $\boxed{\dfrac{M}{m_1} = \dfrac{(2l - n - 1)}{(n - l)}}$.